

公共物品、搭便车、投票与机制设计

根据手写图片整理、补全与重绘图表

整理版讲义

2026 年 6 月 11 日

整理依据与图片顺序

本章按用户给出的图片名称顺序整理: 1.jpg → 2.jpg → 补 1.jpg。手写稿中个别字迹较难辨认, 本讲义保留原有逻辑线索, 并按标准微观经济学表述补全缺漏: 公共物品定义、搭便车、Samuelson 条件、自愿贡献、私人品与公共品的加总差异、多数投票、单峰偏好、中位选民定理, 以及 Clarke/VCG 税的需求显示机制。原始图片已放在文末附录, 便于对照。

目录

1 从“公共物品”开始: 两个核心性质	3
1.1 定义	3
1.2 非竞争性与非排他性	3
2 离散公共品: 意愿支付、成本与搭便车	3
2.1 愿意支付 r_i 的含义	4
2.2 社会有效与私人激励不一致	4
2.3 搭便车的策略结构	5
3 政府供给、税收与 Lindahl 思路	5
3.1 税收分摊的基本逻辑	5
3.2 Lindahl 价格: 每个人付不同价格, 但消费同一公共品	5
4 连续公共品的效率条件: Samuelson 条件	5
4.1 基本模型	5
4.2 用帕累托问题推导 Samuelson 条件	6
4.3 准线性形式下的简化	7
5 私人物品与公共物品: 加总方式完全不同	7
5.1 私人物品: 横向加总	8
5.2 公共物品: 纵向加总	8
6 自愿贡献模型: 为什么会低供给	8
6.1 模型设定	8
6.2 边界解与搭便车	9
6.3 政府供给与挤出效应	9

7 福利最大化的一般写法	10
8 多数投票：公共决策与偏好聚合	10
8.1 多数规则悖论：成对多数可能循环	10
8.2 单峰偏好与双峰偏好	11
8.3 中位选民定理	11
9 手写补充页例子：5、10、15、20 万元公共支出	12
9.1 为什么 20 万元会输	12
9.2 中位数与社会最优不一定相同	12
10 偏好显示与 Clarke 税：让人讲真话的机制	13
10.1 项目决策规则	13
10.2 Clarke 税的思想	13
10.3 手写例子：A、B、C 三人	13
11 本章一页公式总表	14
12 典型题与答案提纲	15
A 原始手写图片对照	17

1 从“公共物品”开始：两个核心性质

1.1 定义

公共物品 (public good) 是指在一定范围内可以被多个消费者共同消费的物品。最典型的例子是路灯、国防、基础科研、公共广播、防疫信息、清洁空气等。手写稿中反复出现的核心句子可以整理成：

公共物品的消费数量对所有人相同：如果公共品数量为 G ，则每个人面对的是同一个 G ，而不是各自不同的 G_i 。

因此在建模时，一个消费者的效用通常写成

$$u_i(x_i, G), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 x_i 是第 i 个消费者的私人物品消费， G 是所有人共同享用的公共物品数量。

1.2 非竞争性与非排他性

公共物品通常用两个性质刻画。

表 1: 公共物品的两个性质

性质	含义	经济后果
非竞争性 (non-rivalry)	一个人消费该物品，不会减少另一个人的可消费数量。路灯亮了以后，多一个人经过并不显著降低其他人看到光的数量。	多增加一个使用者的边际成本常常接近 0。注意这说的是“增加一个消费者”的成本，而不是“多生产一单位公共品”的成本。
非排他性 (non-excludability)	很难或成本很高地阻止不付费者消费。比如国防、城市路灯、空气质量。	容易出现搭便车 (free riding)：人们希望别人付费，自己免费享用。

容易混淆点：平均成本、边际成本与使用者边际成本

公共物品的“非竞争性”不是说生产 G 的边际成本 $C'(G)$ 必然为零。修一盏路灯、增加国防支出、建设公共设施都可能很贵。真正接近零的是：在既定公共品 G 已经存在后，额外多一个人享用该公共品的边际拥挤成本可能为零。若出现拥挤，如道路、公共食堂、图书馆座位，则非竞争性会变弱，公共品变成“拥挤性公共品”或“俱乐部品”。

按“是否排他”和“是否竞争”可以得到四类物品：

表 2: 四类物品分类

	可排他	不可排他
竞争性	私人物品：食物、衣服、手机	公共资源：渔场、拥挤道路、地下水
非竞争性	俱乐部品：会员制软件、收费高速、流媒体	纯公共物品：国防、路灯、基础知识

2 离散公共品：意愿支付、成本与搭便车

手写稿先从最简单的二人离散公共品开始。假设公共品只有“提供/不提供”两种状态：

$$G \in \{0, 1\}, \quad \text{成本为 } C.$$

两个人 A, B 的初始财富为 w_1, w_2 , 若公共品被提供, 每个人获得好处。若第 i 个人为该公共品支付 g_i , 他的私人物品为

$$x_i = w_i - g_i.$$

公共品的总支出要求是

$$g_1 + g_2 \geq C.$$

2.1 愿意支付 r_i 的含义

设 r_i 是第 i 个人对公共品的最大支付意愿 (willingness to pay)。它由无差异条件定义:

$$u_i(w_i - r_i, 1) = u_i(w_i, 0).$$

也就是说, 付出 r_i 并得到公共品, 和不付钱也没有公共品, 效用正好一样。

若支付额 $g_i < r_i$, 则

$$u_i(w_i - g_i, 1) > u_i(w_i, 0),$$

第 i 人从提供公共品中严格受益。若 $g_i > r_i$, 则他宁愿没有该公共品。

在准线性效用的特殊情形

$$u_i(x_i, G) = x_i + v_i(G), \quad v_i(0) = 0,$$

有

$$u_i(w_i - r_i, 1) = w_i - r_i + v_i(1) = w_i,$$

因此

$$r_i = v_i(1).$$

准线性模型下, r_i 就等于公共品带来的货币化收益。

2.2 社会有效与私人激励不一致

公共品提供的社会净收益为

$$r_1 + r_2 - C.$$

若

$$r_1 + r_2 > C,$$

则从总剩余角度, 公共品应该被提供。关键是: 即使总收益大于成本, 也未必有人愿意单独承担成本。

离散公共品的效率条件

公共品应该提供, 当且仅当总支付意愿大于总成本:

$$\sum_i r_i > C.$$

若写成“每个人分摊 g_i ”, 则一种帕累托改进需要同时满足

$$\sum_i g_i \geq C, \quad 0 \leq g_i < r_i \quad \text{对每个参与者成立。}$$

也就是: 总钱够修公共品, 并且每个人缴费都低于自己的受益。

例如, A 的支付意愿为 300, B 的支付意愿为 700, 公共品成本为 400。总收益 $1000 > 400$, 显然应该提供。但若制度要求“谁提出谁付全款”, A 不会付, 因为 $300 < 400$; B 虽然可能愿意付, 但他也希望 A 付一部分。公共品问题的实质不是“没有总价值”, 而是“总价值不能自动转化成个人自愿付款”。

2.3 搭便车的策略结构

搭便车不是道德批评，而是激励约束的结果。若别人出钱，自己免费享用，则自己最优；若自己出钱，别人也免费享用，则自己吃亏。把二人公共品写成贡献博弈，可以得到如下逻辑：

表 3: 公共品贡献博弈的典型结构（示意）

	B 贡献	B 不贡献
A 贡献	公共品提供，双方付费，双方可能都受益	A 承担较多成本， B 搭便车
A 不贡献	A 搭便车， B 承担较多成本	公共品不提供，双方损失潜在总剩余

如果每个人都认为“别人会出钱”，均衡可能是过少供给，甚至完全不供给。若某个人的支付意愿超过总成本，他可能单独提供，但其他人仍会免费享用；若没有人的个人支付意愿超过成本，但总支付意愿超过成本，公共品尤其容易无法由私人市场自发提供。

3 政府供给、税收与 Lindahl 思路

手写稿中提到的一个自然解决思路是：既然自愿付费会失败，那就通过政府强制筹资并统一供给。政府可以通过税收把成本分摊给所有受益者，使得每个人面对的私人缴费低于其支付意愿。

3.1 税收分摊的基本逻辑

若成本为 C ，政府对每个人征税 t_i ，满足

$$\sum_i t_i = C.$$

只要每个人的税负不超过其支付意愿，

$$t_i < r_i,$$

公共品提供就是帕累托改进。现实问题是：政府并不知道每个人真实的 r_i ，而每个人又有动机低报自己的受益，以减少税负。于是公共品问题自然过渡到“偏好显示”和“机制设计”。

3.2 Lindahl 价格：每个人付不同价格，但消费同一公共品

Lindahl equilibrium 的思想是：公共品数量 G 对所有人相同，但每个人面对不同的“个性化价格” p_i 。若单位成本为 $MC(G)$ ，则有效供给要求

$$\sum_i p_i = MC(G), \quad p_i = MRS_i(G).$$

每个人按自己的边际受益付费，所有人的边际价格加总等于社会边际成本。这个思路非常漂亮，但现实中仍然有一个根本困难： MRS_i 是私人信息，个人可能不真实报告。

4 连续公共品的效率条件：Samuelson 条件

4.1 基本模型

接下来手写稿进入连续公共品模型。设社会中有两个人，总资源为 $\omega = w_1 + w_2$ ，公共品生产成本为 $C(G)$ ，且

$$C'(G) > 0.$$

消费者效用为

$$u_1(x_1, G), \quad u_2(x_2, G),$$

资源约束为

$$x_1 + x_2 + C(G) = \omega.$$

4.2 用帕累托问题推导 Samuelson 条件

固定消费者 2 的效用水平 $\bar{u}_2$ ，最大化消费者 1 的效用：

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, G} \quad & u_1(x_1, G) \\ \text{s.t.} \quad & u_2(x_2, G) \geq \bar{u}_2, \\ & x_1 + x_2 + C(G) = \omega. \end{aligned}$$

构造拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = u_1(x_1, G) + \lambda [u_2(x_2, G) - \bar{u}_2] + \mu [\omega - x_1 - x_2 - C(G)].$$

一阶条件为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= u_{1x} - \mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= \lambda u_{2x} - \mu = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G} &= u_{1G} + \lambda u_{2G} - \mu C'(G) = 0. \end{aligned}$$

由前两式可得 $\mu = u_{1x} = \lambda u_{2x}$ 。将第三式除以 μ ：

$$\frac{u_{1G}}{u_{1x}} + \frac{u_{2G}}{u_{2x}} = C'(G).$$

即

$$\boxed{\text{MRS}_1 + \text{MRS}_2 = \text{MC}(G).}$$

这就是 Samuelson condition。

Samuelson 条件的直觉

私人物品的有效配置要求每个人的边际替代率相等，因为同一单位私人物品只能给一个人消费。公共物品不同：同一单位 G 会同时进入所有人的效用。因此，增加一单位 G 的社会边际收益是所有人的边际支付意愿之和，而不是某一个人的边际收益。

$$\text{公共品最优：} \quad \sum_i \text{MRS}_i = \text{MRT} = \text{MC}.$$

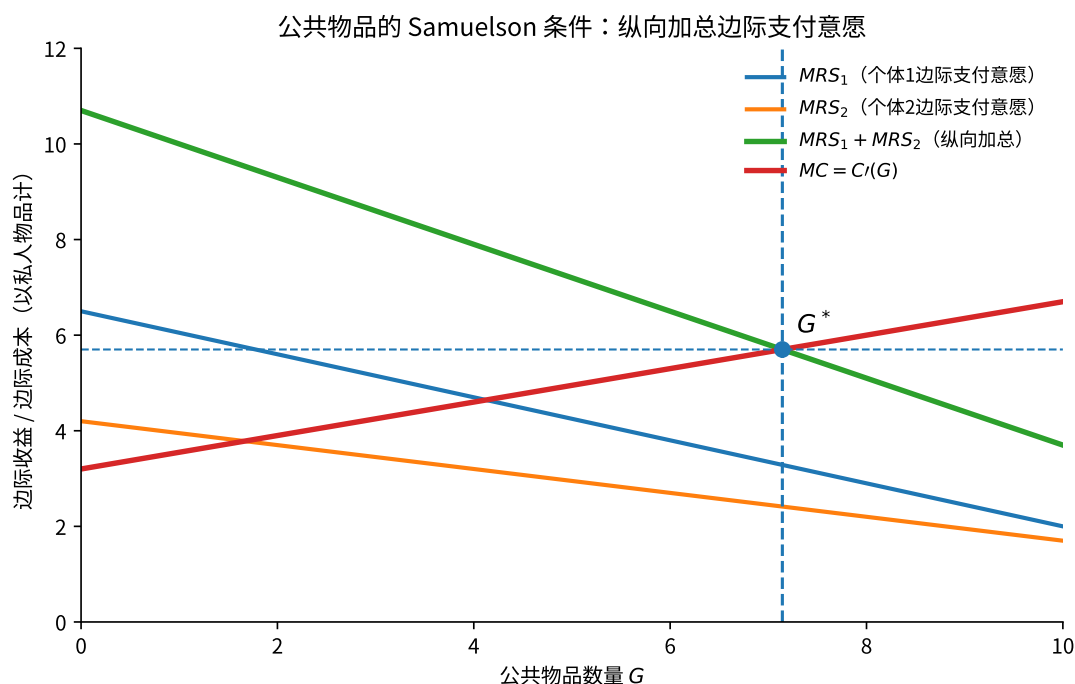


图 1: 公共物品的边际收益需要纵向加总。若在某个 G 上 $\sum_i \text{MRS}_i > \text{MC}$, 说明公共品偏少, 应增加 G ; 若 $\sum_i \text{MRS}_i < \text{MC}$, 说明公共品偏多, 应减少 G 。

4.3 准线性形式下的简化

若

$$u_i(x_i, G) = x_i + v_i(G),$$

则

$$\text{MRS}_i = \frac{\partial u_i / \partial G}{\partial u_i / \partial x_i} = v'_i(G).$$

Samuelson 条件变成

$$v'_1(G) + v'_2(G) = C'(G).$$

这正是手写稿中 “ $\text{MRS}_1 + \text{MRS}_2 = \text{MC}$ ” 与 “ $u_i(x_i, G) = x_i + v_i(G)$ ” 两部分的连接。

5 私人物品与公共物品：加总方式完全不同

手写稿中特别强调：公共物品和私人物品的需求加总方式不同。这个点考试非常容易考。

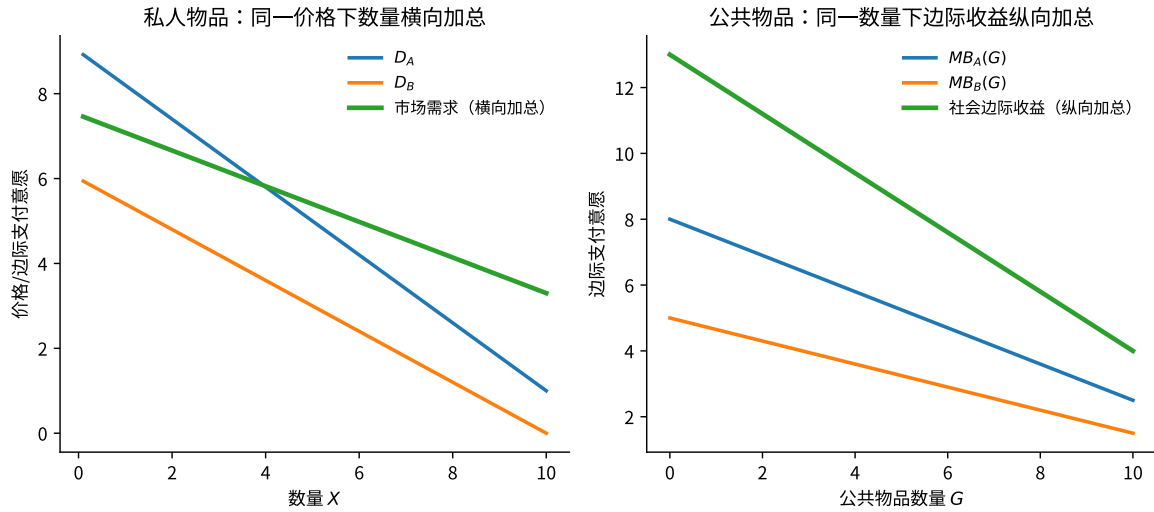


图 2: 私人物品的市场需求是横向加总；公共物品的社会边际收益是纵向加总。

5.1 私人物品：横向加总

私人物品 X 的每一单位只能被一个人消费。给定价格 p ，每个人选择自己的数量 $x_i(p)$ ，市场总需求是

$$X(p) = \sum_i x_i(p).$$

所以是“同一价格下数量相加”。

5.2 公共物品：纵向加总

公共品 G 的同一单位被所有人共同消费。给定 G ，每个人对这一单位公共品都有自己的边际支付意愿 $MRS_i(G)$ ，社会边际支付意愿是

$$MB(G) = \sum_i MRS_i(G).$$

所以是“同一数量下价格/边际支付意愿相加”。

6 自愿贡献模型：为什么会低供给

6.1 模型设定

设公共品由个人贡献形成：

$$G = g_1 + g_2,$$

第 i 个人预算约束为

$$x_i + g_i = w_i, \quad g_i \geq 0.$$

消费者 1 的问题是

$$\begin{aligned} \max_{x_1, g_1} \quad & u_1(x_1, g_1 + g_2) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + g_1 = w_1, \quad g_1 \geq 0, \end{aligned}$$

其中 g_2 被消费者 1 当作给定。

若内点解存在，一阶条件为

$$MRS_1(x_1, G) = 1.$$

直觉是：个人贡献 1 单位，自己损失 1 单位私人物品，但公共品增加 1 单位。个人只考虑自己的边际收益，忽略对别人的外部收益。因此私人贡献条件是

$$MRS_i = 1,$$

而社会有效条件是

$$MRS_1 + MRS_2 = 1$$

(若公共品单位成本为 1)。私人条件显然会导致公共品偏少。

自愿贡献：每个人把他人贡献当作给定，容易出现搭便车和挤出

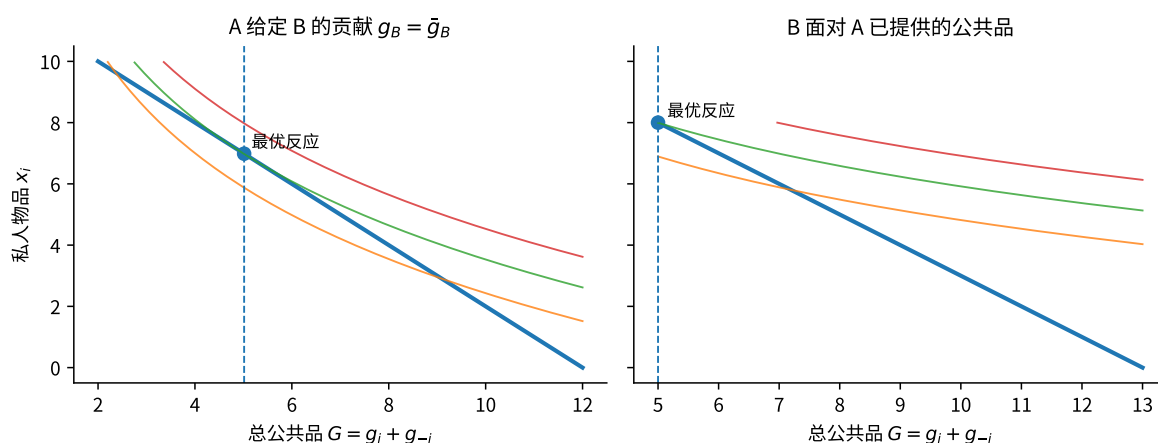


图 3: 自愿贡献把他人的贡献当作既定，个体只计算自己的边际收益，导致搭便车。

6.2 边界解与搭便车

若别人已经贡献了很多公共品，自己在 $g_i = 0$ 处就满足

$$MRS_i(x_i, G) \leq 1,$$

则最优选择是

$$g_i^* = 0.$$

这正是手写稿里“B 搭便车，免费享用 G ”的意思。更一般地，公共品自愿供给常有三类结果：

- (1) 某个高估值或高收入者单独提供，其他人搭便车；
- (2) 多人都想等别人先出，出现协调失败；
- (3) 有人贡献，但贡献量低于 Samuelson 有效水平。

6.3 政府供给与挤出效应

若政府征税提供 T 单位公共品，而个人仍可以私人捐赠，总公共品为

$$G = T + g_1 + g_2.$$

在准线性且没有财富效应的模型中，政府公共品可能一比一挤出私人捐赠：政府多提供 1 单位，私人少捐 1 单位，总 G 不变。现实中通常不会完全挤出，但这个理论结论说明：公共品政策不能只看政府支出，还要看它是否替代了原有私人贡献。

7 福利最大化的一般写法

手写稿中还有一个更抽象的社会福利最大化写法。设有两个消费者 A, B ，私人物品 X 与公共品 Y ，社会福利函数为

$$W = W[u^A(x^A, Y), u^B(x^B, Y)],$$

生产可能性约束为

$$T(x^A + x^B, Y) = 0.$$

这里 $x^A + x^B$ 是私人物品总消费，而 Y 是公共品数量，二人共同消费同一个 Y 。

有效条件可以写成

$$\boxed{\text{MRS}_{YX}^A + \text{MRS}_{YX}^B = \text{MRT}_{YX}.}$$

其中

$$\text{MRS}_{YX}^i = \frac{\partial u^i / \partial Y}{\partial u^i / \partial x^i}$$

表示第 i 人愿意为一单位公共品 Y 放弃多少私人物品 X ； MRT_{YX} 表示生产上增加一单位公共品所需牺牲的私人物品数量。

私人品效率条件与公共品效率条件的对比

如果 X, Y 都是私人物品，则有效配置要求

$$\text{MRS}_{XY}^A = \text{MRS}_{XY}^B = \text{MRT}_{XY}.$$

如果 Y 是公共物品，二人消费同一 Y ，则有效配置要求

$$\text{MRS}_{YX}^A + \text{MRS}_{YX}^B = \text{MRT}_{YX}.$$

差别来自“共同消费”：公共品的边际收益要对人求和。

8 多数投票：公共决策与偏好聚合

公共物品通常通过政治过程决定，最基本机制是多数投票。手写稿后半部分转向“投票人偏好”“多数规则悖论”“单峰偏好”和“中位选民”。

8.1 多数规则悖论：成对多数可能循环

设有三个备选方案 x, y, z ，三个投票人 A, B, C 的偏好如下：

表 4: Condorcet 循环的偏好结构

排序	A	B	C
第 1	x	y	z
第 2	y	z	x
第 3	z	x	y

逐对投票：

$$x \succ_M y, \quad y \succ_M z, \quad z \succ_M x.$$

这里 $\succ_M$ 表示多数胜出。于是社会偏好出现循环： x 打败 y ， y 打败 z ，但 z 又打败 x 。结果取决于投票议程，谁先和谁比会影响最终方案。

多数规则悖论的含义

个体偏好都可以是理性的、传递的，但多数投票汇总出来的社会偏好未必传递。公共品决策因此不仅是“算收益成本”，还涉及政治机制和议程设计。

8.2 单峰偏好与双峰偏好

若政策可以排列在一条线上，比如公共支出 G 从低到高排列，一个人的偏好若只有一个最喜欢的点，离这个点越远效用越低，就称为单峰偏好（single-peaked preference）。若一个人有两个局部最喜欢的政策点，就是双峰或非单峰偏好。

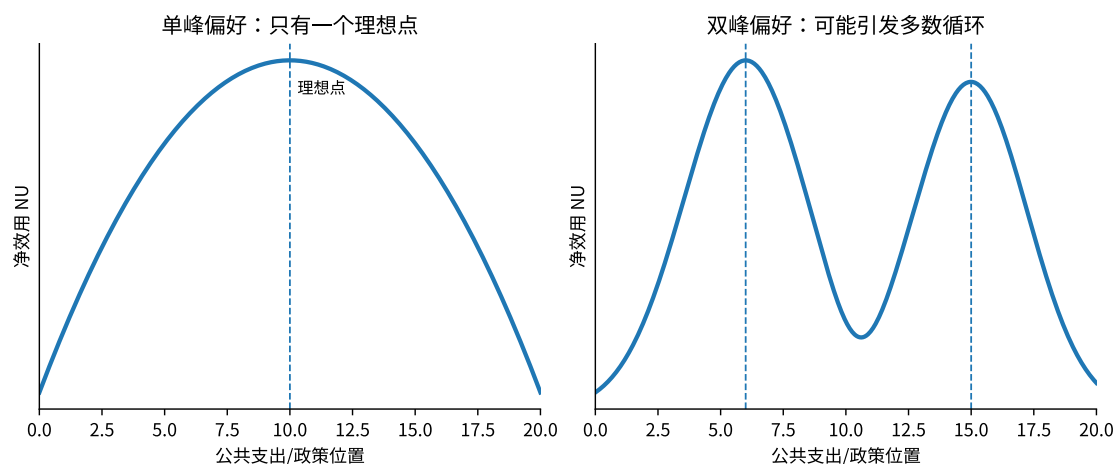


图 4: 手写补充页中的单峰偏好与双峰偏好。单峰偏好下多数投票更稳定；非单峰偏好更容易出现循环。

8.3 中位选民定理

若所有投票人在一维政策空间上都有单峰偏好，并且采取简单多数投票，则中位选民的理想点会打败其他任意方案，成为多数投票均衡。

中位选民定理

在一维政策空间、单峰偏好、简单多数规则下，中位选民的最优政策是 Condorcet winner。也就是说，任何偏离中位点的方案，都能被中位点以多数击败。

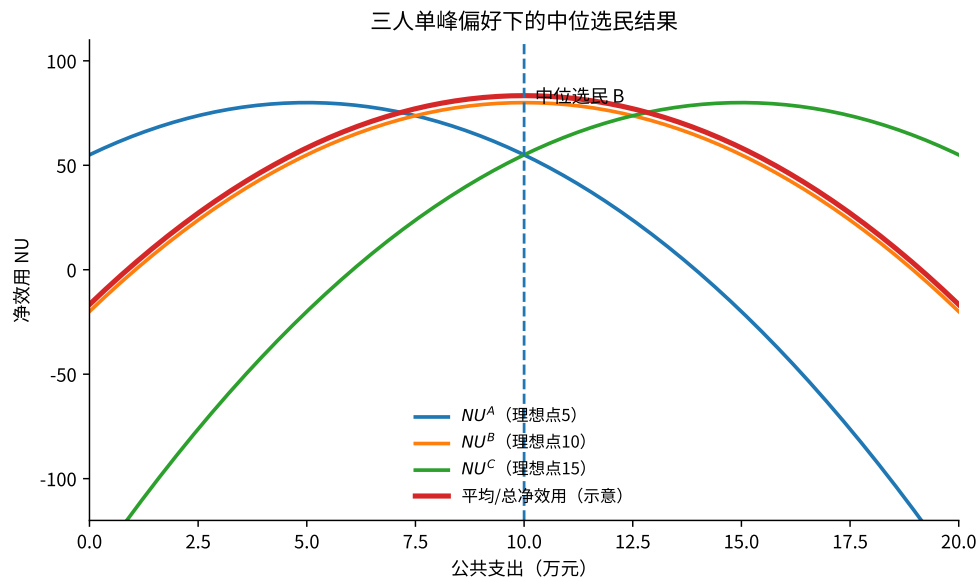


图 5: 三人理想公共支出分别为 5, 10, 15 万元时, 中位选民 B 的理想点 10 万元会成为多数投票结果。

9 手写补充页例子：5、10、15、20 万元公共支出

补充页中给出一个非常典型的中位选民例子。设 A, B, C 三个投票人的理想公共支出分别为

$$G_A^* = 5, \quad G_B^* = 10, \quad G_C^* = 15$$

万元。若三人的偏好都是单峰的, 则逐对投票会选择 10 万元, 因为 B 是中位选民。

9.1 为什么 20 万元会输

方案 20 万元位于三人理想点右侧。相对于 20, 至少 A 和 B 更喜欢较低支出; 因此 20 会被较低方案击败。手写页中的 “ $A, B, C \rightarrow 20 \times$ ” 可以理解为: 20 万元不是多数稳定方案。

9.2 中位数与社会最优不一定相同

若三人效用是对称二次损失

$$NU_i(G) = K - (G - G_i^*)^2,$$

则总净效用最大化的一阶条件给出

$$G^{SO} = \frac{G_A^* + G_B^* + G_C^*}{3}.$$

当理想点为 5, 10, 15 时, 平均数也是 10, 所以中位选民结果与总效用最大化结果一致。

但这只是对称例子的巧合。若 B 与 C 的理想点都为 10, 而 A 为 5, 则多数结果仍是 10, 但平均理想点为

$$\frac{5 + 10 + 10}{3} = \frac{25}{3} < 10,$$

多数投票相对于二次损失意义下的社会最优会偏高。若 A 与 B 的理想点为 10, 而 C 为 15, 多数结果为 10, 但平均理想点为

$$\frac{10 + 10 + 15}{3} = \frac{35}{3} > 10,$$

多数投票相对于社会最优会偏低。

考试常见陷阱

中位选民定理说的是“多数投票均衡在哪里”，不是说它一定最大化社会福利。多数结果由中位数决定；功利主义总效用最优在常见二次损失模型中由平均数决定。中位数与平均数可以一致，也可以不一致。

10 偏好显示与 Clarke 税：让人讲真话的机制

公共品决策的根本困难是：每个人的真实估值 v_i 是私人信息。若税负取决于报告值，个人有动机低报；若项目能否通过取决于报告值，个人又可能夸大。手写稿最后部分给出 Clarke 税的例子，这属于 VCG 机制的一种。

10.1 项目决策规则

假设公共项目成本为 C ，每个人报告估值 $\hat{v}_i$ 。有效决策规则是：

若 $\sum_i \hat{v}_i \geq C$ ，则提供项目；否则不提供。

若成本按固定份额 c_i 分摊，个体净值为

$$n_i = \hat{v}_i - c_i.$$

项目应通过当且仅当

$$\sum_i n_i \geq 0.$$

10.2 Clarke 税的思想

某个人是关键人物 (pivotal) 时，他的报告改变了社会选择结果。Clarke 税让关键人物为自己给别人造成的外部性付费。非关键人物不用付 Clarke 税。

设社会选择为 $d \in \{0, 1\}$ ， $d = 1$ 表示项目通过。第 i 人的 Clarke 税可以理解为：

$$T_i = \max_{d \in \{0, 1\}} \sum_{j \neq i} n_j(d) - \sum_{j \neq i} n_j(d^*),$$

即“如果没有你，其他人本来能得到的最大净剩余”减去“因为你参与并决定结果后，其他人实际得到的净剩余”。

10.3 手写例子：A、B、C 三人

手写稿中的数字可整理为：公共项目总成本为 300，三人平均分摊，每人成本份额为 100。三人的估值分别为

$$v_A = 50, \quad v_B = 50, \quad v_C = 250.$$

于是净值为

$$n_A = -50, \quad n_B = -50, \quad n_C = 150.$$

总净值为

$$-50 - 50 + 150 = 50 > 0,$$

所以项目应当通过。

表 5: Clarke 税例子

投票人	成本份额 c_i	估值 v_i	净值 $n_i = v_i - c_i$	Clarke 税
A	100	50	-50	0
B	100	50	-50	0
C	100	250	150	100

为什么只有 C 付税？因为如果没有 C，A + B 的总净值为

$$-50 - 50 = -100 < 0,$$

项目不会通过；加入 C 后项目通过，A 和 B 各自得到 -50，合计损失 100。因此 C 是关键人物，他需要支付的 Clarke 税为 100。支付税后，C 的净收益为

$$150 - 100 = 50 > 0,$$

仍然愿意真实支持项目。

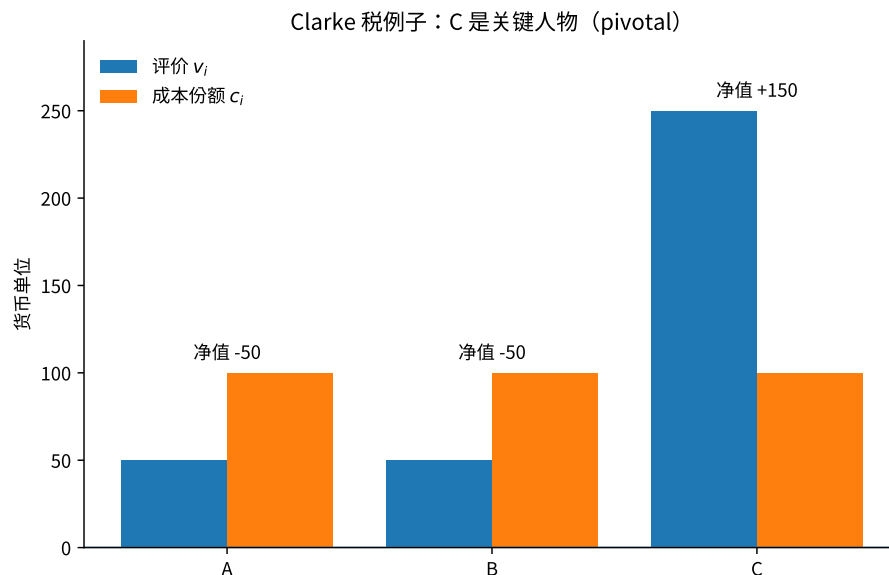


图 6: A、B、C 的估值、成本份额与净值。C 的存在改变了项目是否通过，因此 C 是 pivotal agent。

Clarke 税的结论

Clarke/VCG 机制的目标不是让所有人都不交税，而是让“真实报告”成为占优策略。一个人如果不是关键人物，他改变不了结果，所以不用付额外税；如果他是关键人物，他要补偿自己改变结果给其他人造成的净损失。

11 本章一页公式总表

主题	公式	含义
公共品效用	$u_i(x_i, G)$	x_i 私人消费, G 共同消费。
支付意愿	$u_i(w_i - r_i, 1) = u_i(w_i, 0)$	r_i 是让个体无差异的最大支付额。

离散公共品效率	$\sum_i r_i > C$	总收益大于总成本，应提供。
资源约束	$\sum_i x_i + C(G) = \sum_i w_i$	公共品生产消耗社会资源。
个体边际支付意愿	$MRS_i = \frac{u_{iG}}{u_{ix}}$	个体愿用多少私人物品换一单位公共品。
Samuelson 条件	$\sum_i MRS_i = C'(G)$	公共品有效供给：边际收益纵向加总。
准线性效用	$u_i = x_i + v_i(G)$	此时 $MRS_i = v'_i(G)$ 。
自愿贡献	$G = \sum_i g_i, x_i + g_i = w_i$	个人只看自己的边际收益。
私人贡献内点条件	$MRS_i = 1$	单位成本为 1 时的个体最优。
公共品社会最优	$\sum_i MRS_i = 1$	单位成本为 1 时的社会最优。
公共品与私人物品区别	公共品纵向加总，私人物品横向加总	最常考的图形题。
多数循环	$x \succ_M y, y \succ_M z, z \succ_M x$	多数偏好可能不传递。
中位选民	单峰偏好 $\Rightarrow$ 中位点胜出	多数投票均衡，不一定社会最优。
Clarke 税	$T_i = \max_d \sum_{j \neq i} n_j(d) - \sum_{j \neq i} n_j(d^*)$	关键人物为外部性付费。

12 典型题与答案提纲

题 1：为什么公共物品的需求曲线要纵向加总？

答题抓手：同一单位公共品被所有人共同消费，所以对于给定 G ，每个人都获得一份边际收益。社会愿意为这一单位 G 支付的总额是所有人的边际支付意愿之和，故纵向加总。私人物品则是给定价格下各自购买数量加总，故横向加总。

题 2：推导 Samuelson 条件

写出帕累托问题

$$\max u_1(x_1, G) \quad \text{s.t.} \quad u_2(x_2, G) \geq \bar{u}_2, \quad x_1 + x_2 + C(G) = \omega.$$

构造拉格朗日函数，列一阶条件，消去乘子，得到

$$\frac{u_{1G}}{u_{1x}} + \frac{u_{2G}}{u_{2x}} = C'(G).$$

最后解释左边是社会边际收益，右边是社会边际成本。

题 3：自愿贡献为什么低于有效水平？

个人贡献的一阶条件是 $MRS_i = 1$ ，因为他只计算自己的收益；社会条件是 $\sum_i MRS_i = 1$ ，因为一单位公共品同时给所有人带来收益。只要别人也受益，个人贡献就存在正外部性，私人供给偏低。

题 4：中位选民结果是否一定有效？

不一定。中位选民定理给的是多数投票均衡，而不是福利最大化。若理想点分布对称、效用损失形式相同，中位数可能等于平均数；但一般情况下，中位数与社会最优不同，可能导致公共品过度供给或不足供给。

题 5：Clarke 税例子

若 A, B, C 成本份额均为 100，估值分别为 50, 50, 250，则净值分别为 $-50, -50, 150$ ，总净值为 $50 > 0$ ，项目通过。没有 C 时项目不通过；有 C 后其他两人合计损失 100，所以 C 是关键人物，Clarke 税为 100。 C 税后净收益为 50，仍愿意真实支持。

图8的2 -> 0的产出! 1

300 > 400
700
MC(G)=1
解释: $MRS_1 + MRS_2 = MC(G)$
若前>后, A以1/2, B以1/2私人品以1/2增加单位G, 节省的成本由两个自己。
若后>前, A愿意接受1/2, B愿意接受1/2美元而减少单位的G, 节省的成本由两个自己。

计算边际成本: $W_i(X_i, G) = X_i + V_i(G)$
 $MRS_i = \frac{\partial W_i / \partial G}{\partial W_i / \partial X_i} = \frac{\partial V_i(G)}{\partial X_i}$
最优条件: $\frac{\partial V_i(G)}{\partial G} + \frac{\partial V_i(G)}{\partial X_i} = MC(G)$
G与X无关, 所以在唯一的一个G上提供数量。

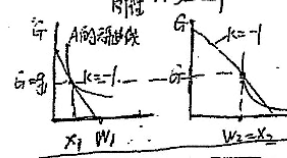
1. 社会福利最大化的解: X-私人品 Y-公共品 T-转移支付

max $W = W[V_i(X_i, Y), V_j(X_j, Y)]$
s.t. $T(X_i + X_j, Y) = 0$
可以解得 $\frac{\partial V_i / \partial Y}{\partial V_i / \partial X_i} + \frac{\partial V_j / \partial Y}{\partial V_j / \partial X_j} = \frac{\partial T}{\partial Y}$
重复加 -> 0
结果: 同一数量不同支付之愿意支付的价格。
A提供Y, 的公共物品, 直到 $MRS_i = 1$
而B提供Y, 愿意支付G的公共物品和 $W_2 = X_2$ 的替代效应
B的愿意比A扩张了! 1. 初始机制会导致帕累托改进

免费搭车 $\max U_i(X_i, g, t_i)$

G=g+g2 s.t. $X_i + g_i = W_i$

得 $MRS_i = 1$
同理 $MRS_j = 1$



1. 公共物品提供的帕累托改进

1. 投票 A B C
X Y Z
X Y Z
X Y Z

多数规则理论
结果和顺序
可能性? 帕累托平是可能吗?
到底需要多少? 是多数人的意见

X vs Y $\Rightarrow$ X vs Z $\Rightarrow$ Z
Z vs X $\Rightarrow$ Z vs Y $\Rightarrow$ Y
Y vs Z $\Rightarrow$ Y vs X $\Rightarrow$ X

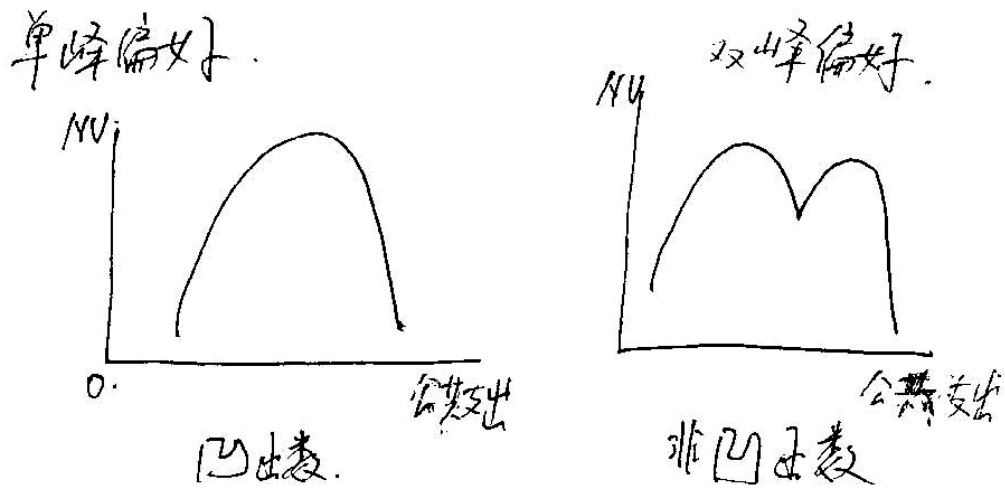
2. 需求显示: 路灯 C=100 每位评价 V_i 若 $V_i \geq 100$ 则有效。
办法一: 安装路灯的成本与每个人的评价成正比, 但会搭便车, 以少数的能够安装路灯。
办法二: $n_i = V_i - C_i$ $\sum n_i > 0$ 安! 再征来评价
若 $V_i > C_i$, 那么 $V_i > C_i$, 使路灯通过
若 $V_i < C_i$, 那么 $V_i < C_i$, 使路灯不通过

办法三: 纠正: 如果个人获得净收益由正变负, 则对路灯投票为 若 $V_i > 0$ 则支付人承担这个费用!
支付人承担这个费用!
支付人承担这个费用!

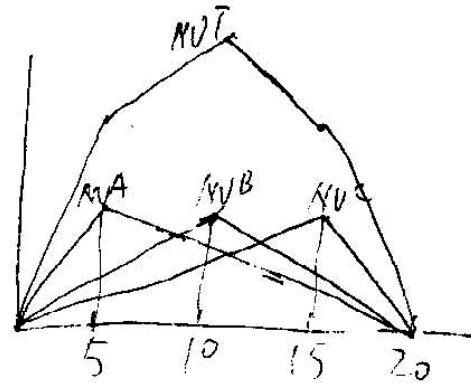
姓名	成本	评价	净收益	支付
A	100	50	-50	0
B	100	50	-50	0
C	100	250	150	100

例: A(80) 不是关键人物, 他要使得路灯不通过, 需要支付净收益 < -100, 所以成为关键人物。
C: 是关键人物, 得到 $150 - 100 = 50$, 若为或降低路灯的税收。
支付人承担这个费用!
支付人承担这个费用!
支付人承担这个费用!

图 8: 原始图片顺序 2: 2.jpg。



假定A,B,C投票 公共支出: 5元, 10元, 15元, 20元



NV^A, NV^B, NV^C

三人净效用

NUT 净效用00元

A — 5元 ✓ 多数投票: 10元当选

B — 10元 ✓

C — 15元 ✓

A, B, C → 20元 X.

⇒ 中间多数投票. 中间偏好.

∥

不一定要选. 本例: $(5+10+15)/3 = 10$

若 $NV_C = NV_B \Rightarrow$ 选10元 但 $10 > 15/3$ 超过社会最优水平

$NV_A = NV_B \Rightarrow$ 选10元. 但 $10 < 35/3$ 不够.

图 9: 原始图片顺序 3: 补 1.jpg。